NOMBRE:

NOTA…………

PRIMER PARCIAL(31/OCT/2012) PARTE 1

1. Si V es un e.v. de dimensión 4, L un s.e.v. de V y M el s.e.v. complementario de L, entonces, si se sabe que dim(M)=3 la dimensión de L valdrá

SOLUCIÓN:

dim(L)=dim(V)-dim(M)=4-3=1

2. ¿Cuál de los siguientes conjuntos **no** es un s.e.v. de [R^3?

a) {(a,b,c):a=0}
b) {(a,b,c):b $\geq$ -1}
c) {(a,b,c):a-3b+c=0}
d) Ninguno es s.e.v.
e) Todos lo son.

RESPUESTA:b

3. Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la dimensión del subespacio Ker(M)=nul(M) vale:

SOLUCIÓN:

$$\dim(\mathrm{Ker}(M))=3-\mathrm{rg}(M)=3-\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}=2$$

4. La matriz inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, calculada por el método de Gauss *(poned los pasos, si no no es válida la respuesta, no es válido calcularla por Adjuntos)*

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 4/11 & 3/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{bmatrix},$$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \underset{E_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{E_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{E_2(-1/11)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

$$\underset{E_{12}(-4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/11 & 3/11 \\ 0 & 1 & -1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

5. Calcular la base usual asociada al subespacio $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ **SOLUCIÓN:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \underset{E_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \underset{E_{32}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{E_{13}(7)}{\sim}\underset{E_{23}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = Can(A)$$

Con lo cual la base usual de S es $B_U(S)=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

NOMBRE:

NOTA…………

6. Si tenemos una base de $\mathbb{R}^4$, con $B(\mathbb{R}^4) = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$, y las coordenadas de un vector $\vec{v}$ con respecto a la misma son $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_B$. Calcular sus coordenadas con respecto a la nueva base $B^*(\mathbb{R}^4) = \{\vec{s}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_3, -\vec{s}_4\}$. **SOLUCIÓN:**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B^*}$$

7. Dados los subespacios $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ y $T \equiv \begin{Bmatrix} x = -8\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = -2\alpha \\ t = -\alpha \end{Bmatrix}$, comprobar si son o no ortogonales.
SOLUCIÓN:

Basta con comprobar que dos cualquiera de sus bases son ortogonales entre sí. Basándonos en el ejercicio anterior sabemos que $B(S) = \left\{\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$. De las paramétricas dadas deducimos que $B(T) = \left\{\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Ahora comprobamos que se cumple que $\langle \vec{t}_1, \vec{s}_j \rangle = 0, j = 1,2,3$.
Por lo que , efectivamente , son sev. Ortogonales.

8. Obtener el subespacio SUMA de los subespacios $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ y $T \equiv x + y + z = 0$.

Cómo vemos S es una recta con vector director $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ cómo dicho vector verifica las ecuaciones de T (plano) , el subespacio suma es precisamente el plano dado T.

9. Convertir en ortogonal la base siguiente del subespacio $W, B(W) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
SOLUCIÓN: Aplicando G-S s obtiene:

$$B^{ORTG}(W) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

10. Calcular la proyección del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $T \equiv x + y + z = 0$.

SOLUCIÓN: Una base del subespacio dado es por ejemplo $B(T) = \left\{\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. El vector proyección, $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ha de verificar que $\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{t}_j \rangle = 0, j = 1,2$. De aquí se deduce que sus coordenadas

han de cumplir $x = z, y = z - 2$. Cómo, además cumple las ecuaciones de T será $z + z - 2 + z = 0 \left(\Rightarrow z = \frac{2}{3}\right)$. Entonces $\vec{p} = \begin{pmatrix} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Problema1:*(2 ptos total.)*

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$se consideran los subespacios siguientes:

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Con estos datos, se pide:

a) *(0.5 ptos.)*Calcular una base de cada uno y especificar sus dimensiones respectivas.

b) *(0.2 ptos.)*Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio $S \bigcap T$.

c) *(0.7 ptos.)*Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio $S + T$.

d) *(0.6 ptos.)*Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$.

SOLUCIÓN:

a) B(S)= $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, dim(S)=2 B(T)= $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, dim(T)=1.

b) Como rg $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow S \bigcap T = \{\underline{0}\}, \dim(S \bigcap T) = 0$

c) Usando la fórmula de las dimensiones es: dim(S+T)=2+1-0=3, pues la intersección entre ambos es nula, además B(S+T)= $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (Unimos las bases de ambos, por la misma razón).

De acuerdo con la base anterior planteamos las ecs. Param. Del s.e. S+T como: $\begin{cases} u = \gamma \\ v = \alpha \\ w = 0 \\ r = \alpha - \beta + \gamma \end{cases}$.

Las implícitas (4-3=1 en total) se deducen inmediatamente de las anteriores w=0.

d) $B(S^{\perp}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, puesto que al obligar a que un vector genérico de $S^{\perp}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sea ortogonal a los de la base de S , B(S)= $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, dicho vector se ve obligado a cumplir que

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y + t = 0 \qquad (0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -t = 0$$

las ecuaciones implícitas de dicho subespacio son, por lo tanto : y=0, t=0, y la base es la expresada antes.

NOMBRE:

NOTA…………

Problema2: *(2 ptos total.)*

Calcular la matriz de cambio de base de B=$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ a B*==$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

SOLUCIÓN:

Disponemos ambas bases en la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 4 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{E_{21}(-1)E_{31}(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 & -1\end{array}\right)$$

$$\underset{E_2(\frac{1}{4})}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 & -1\end{array}\right)\underset{E_{12}(1)E_{32}(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} & -1 & -1\end{array}\right)$$

$$\underset{E_{13}(\frac{1}{3})E_{23}(\frac{-1}{9})}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} & -1 & -1\end{array}\right)\underset{E_3(\frac{4}{9})}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9}\end{array}\right)$$

$$Por\ lo\ que\ C(B,B*)=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{17}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$